

TWIERDZENIE O IMPRYMITYWNOŚCI

PIOTR MIKOŁAJ SOŁTAN

ABSTRAKT. Niniejszy plik zawiera notatki do referatu na temat twierdzenia o imprymitywności w wersji Rieffela. Rozważamy tylko sytuację uproszczoną odpowiadającą indukcji reprezentacji z podgrupy otwartej.

1. POCZĄTEK

1.1. **Moduły indukowane.** Główne założenia:

- A jest C^* -algebrą, a B jej podalgebrą. O żadnej nie zakładamy, że ma jedynkę.
- Włożenie $B \hookrightarrow A$ jest morfizmem (czyli B jest niezdegenerowana).
- $P: A \rightarrow B$ jest warunkową wartością oczekiwaną.

Niech $\mathcal{H}$ będzie B modulem, tj. przestrzenią Hilberta z niezdegenerowaną reprezentacją B (potem rozszerzymy jeszcze to pojęcie). Definiujemy *moduł indukowany* ${}^A_P\mathcal{H}$ w następujący sposób:

- na przestrzeni wektorowej $A \odot_B \mathcal{H}$ definiujemy formę półtoraliniową $\langle \cdot | \cdot \rangle$ kładąc

$$\langle a \otimes \xi | a' \otimes \xi' \rangle = \langle \xi | P(a^* a') \xi' \rangle,$$

- forma ta daje iloczyn skalarny na $(A \odot_B \mathcal{H})/N$, gdzie

$$N = \{X \in A \odot_B \mathcal{H} \mid \langle X | X \rangle = 0\},$$

i ${}^A_P\mathcal{H}$ jest z definicji uzupełnieniem otrzymanej przestrzeni pre-hilbertowskiej.

Na przestrzeni Hilberta ${}^A_P\mathcal{H}$ mamy niezdegenerowaną reprezentację A pochodzącą od działania A na $A \odot_B \mathcal{H}$ przez lewe mnożenie:

$$a(a' \otimes \xi) = aa' \otimes \xi, \quad a, a' \in A, \xi \in \mathcal{H}.$$

Reprezentację tę będziemy oznaczać symbolem π czyli mamy $\pi \in \text{Mor}(A, \mathcal{K}({}^A_P\mathcal{H}))$.

1.2. **Szczególny przypadek.** Niech G będzie grupą lokalnie zwartą i niech H będzie otwartą podgrupą G . Wówczas

- kładąc $A = C^*(G)$ i $B = C^*(H)$ mamy $B \subset A$ i $B \hookrightarrow A$ jest morfizmem,
- istnieje warunkowa wartość oczekiwana $P: A \rightarrow B$.

Zanurzenie $B \hookrightarrow A$ pochodzi od włożenia $L_1(H) \hookrightarrow L_1(G)$ przez rozszerzenie funkcji z H na G przez nadanie jej wartości 0 na $G \setminus H$. Z kolei P pochodzi od operacji $L_1(G) \rightarrow L_1(H)$ polegającej na mnożeniu przez funkcję charakterystyczną podgrupy H .

Przypomnijmy, że dla dowolnej lokalnie zwartej grupy K mamy kanoniczne utożsamienie (mocno ciągłych unitarnych) reprezentacji K z reprezentacjami $C^*(K)$. W szczególności każda reprezentacja H odpowiada pewnemu B -modułowi $\mathcal{H}$. Okazuje się, że ${}^A_P\mathcal{H}$ odpowiada wówczas reprezentacji indukowanej grupy G pochodzącej od wyjściowej reprezentacji H .

2. WEWNĘTRZNY ILOCZYN TENSOROWY C^* -MODUŁÓW HILBERTOWSKICH

Niech

- A i C będą C^* -algebrami,
- E będzie C^* -modułem hilbertowskim nad A ,
- F będzie C^* -modułem hilbertowskim nad C ,
- $\phi: A \rightarrow \mathcal{L}(F)$ będzie $*$ -homomorfizmem (w zastosowaniach mamy często nieco więcej, a mianowicie $\phi \in \text{Mor}(A, \mathcal{K}(F))$, tj. ϕ jest $*$ -homomorfizmem $A \rightarrow \mathcal{L}(F)$ takim, że $\overline{\phi(A)\mathcal{K}(F)} = \mathcal{K}(F)$); w szczególności F jest lewym A -modułem.

Przestrzeń $E \odot_A F$ jest prawym B modułem. Definiujemy formę półtoraliniową na $E \odot_A F$ o wartościach w B :

$$\langle x_1 \otimes y_1 | x_2 \otimes y_2 \rangle = \langle y_1 | \phi(\langle x_1 | x_2 \rangle) y_2 \rangle, \quad x_1, x_2 \in E, y_1, y_2 \in F.$$

Okazuje się, że opisana powyżej forma jest iloczynem skalarnym ([1, Proposition 4.5]) i uzupełnienie $E \odot_A F$ w normie pochodzącej od tego iloczynu skalarnego nazywamy *wewnętrznym iloczynem tensorowym* E i F , a oznaczamy symbolem $E \otimes_\phi F$. Przestrzeń $E \otimes_\phi F$ jest C^* -modułem hilbertowskim nad B .

Dodatkowo na $E \otimes_\phi F$ mamy reprezentację $\mathcal{L}(E)$ przez operatory sprzęgalne:

$$T(x \otimes y) = Tx \otimes y, \quad T \in \mathcal{L}(E), x \in E, y \in F.$$

i uzyskane w ten sposób odwzorowanie $\rho: \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E \otimes_\phi F)$ jest morfizmem z $\mathcal{K}(E)$ do $\mathcal{K}(E \otimes_\phi F)$. Ponadto jest on iniektywny ilekroć ϕ jest iniektywny ([1, strona 42]). Na dodatek, jeśli $\phi(A) \subset \mathcal{K}(F)$, to obraz $\mathcal{K}(E)$ w $\mathcal{L}(E \otimes_\phi F)$ leży w $\mathcal{K}(E \otimes_\phi F)$ ([1, Proposition 4.7]).

3. MODUŁ X

Wróćmy do sytuacji z części 1. Na A definiujemy formę półtoraliniową o wartościach w B :

$$\langle a_1 | a_2 \rangle = P(a_1^* a_2), \quad a_1, a_2 \in A. \quad (1)$$

Na ilorazie A/N , gdzie

$$N = \{a \in A \mid \langle a | a \rangle = 0\},$$

forma (1) definiuje iloczyn skalarny o wartościach w B . Definiujemy X jako C^* -moduł hilbertowski nad B powstały z uzupełnienia A/N w normie pochodzącej od iloczynu skalarnego.

Reprezentacja A przez operatory sprzęgalne na X pochodzi z konstrukcji opisanej w części 2: dla $a \in A$ operator lewego mnożenia przez a

$$A \ni a' \mapsto aa' \in A, \quad a' \in A$$

przenosi się na przestrzeń A/N (bo N jest lewym ideałem) i definiuje odwzorowanie ograniczone, a w konsekwencji przedłuża się do operatora $X \rightarrow X$. Będziemy go oznaczać symbolem L_a , a odwzorowanie $a \mapsto L_a$ oznaczmy symbolem λ . W ten sposób otrzymujemy reprezentację A przez operatory sprzęgalne na X . reprezentacja ta jest niezdegenerowana, czyli $\lambda \in \text{Mor}(A, \mathcal{K}(X))$. Innymi słowy X jest lewym A -modułem.

Na mocy lematu umieszczonego w Dodatku mamy

$$P(a^* b)^* P(a^* b) \leq \|P(a^* a)\| P(b^* b), \quad a, b \in A. \quad (2)$$

W szczególności dla dowolnego $a \in A$ zachodzi

$$P(P(a)^* P(a)) = P(P(a^*) P(a)) = P(P(a^* P(a))) = P(a^* P(a)) \quad (3)$$

Tak więc oznaczając przez x lewą stronę (3) i kładąc $b = P(a)$ otrzymujemy na mocy (2)

$$x^* x \leq \|P(a^* a)\| P(b^* b). \quad (4)$$

Teraz jeśli $a \in N$, to z (4) wynika, że $x = 0$, co oznacza, że $P(N) \subset N$, a więc P definiuje operator $A/N \rightarrow A/N$. Ten sam rachunek pokazuje, że operator ten jest ograniczony: istotnie, używając

powyższych oznaczeń i nierówności (4) mamy

$$\begin{aligned}
\|P(a)\|_X^2 &= \|P(P(a)^*P(a))\|^2 \\
&= \|x\|^2 = \|x^*x\| \\
&\leq \|P(a^*a)\|\|P(b^*b)\| \\
&= \|P(a^*a)\|\|P(P(a)^*P(a))\| \\
&= \|a\|_X\|P(a)\|_X.
\end{aligned}$$

Skracając przez $\|P(a)\|_X$ otrzymujemy

$$\|P(a)\|_X \leq \|a\|_X, \quad a \in A.$$

W szczególności operacja $a \mapsto P(a)$ definiuje ograniczony operator $P: X \rightarrow X$.

Łatwo sprawdzić, że $P \in \mathcal{L}(X)$: dla $a, b \in A$ mamy

$$P(P(a)^*b) = P(a^*)P(b) = P(a^*P(b)),$$

co pokazuje, że

$$\langle Px|y \rangle = \langle x|Py \rangle$$

dla wszystkich $x, y \in X$.

Twierdzenie 1. *Algebra $\mathcal{K}(X)$ jest generowana przez operatory postaci $L_a P L_{b^*}$ dla $a, b \in A$.*

Dowód. Niech $a, b, c \in A$. Oznaczając przez $[\cdot]$ klasę elementu A w X mamy

$$\begin{aligned}
(L_a P L_{b^*})[c] &= L_a(P[(b^*c)]) \\
&= L_a[P(b^*c)] \\
&= [aP(b^*c)] \\
&= [a]P(b^*c) = [a]\langle [b]|[c] \rangle.
\end{aligned}$$

To oznacza, że $L_a P L_{b^*} = |[a]\rangle\langle [b]|$, co dowodzi tezy. $\square$

4. INDUKCJA JAKO ILOCZYN TENSOROWY

Twierdzenie 2. *Niech $\mathcal{H}$ będzie B -modułem i oznaczmy reprezentację B na $\mathcal{H}$ symbolem ϕ . Wówczas moduł indukowany ${}^A_P\mathcal{H}$ jest izomorficzny z $X \otimes_\phi \mathcal{H}$.*

Dowód. Rozważmy odwzorowanie

$$\Phi_0: A \odot_B \mathcal{H} \longrightarrow X \odot_B \mathcal{H}$$

zdefiniowane na tensorach prostych jako

$$\Phi_0(a \otimes \xi) = [a] \otimes \xi,$$

gdzie $[a]$ oznacza klasę a w $A/N \subset X$. Odwzorowanie to jest dobrze zdefiniowane i jest izometrią dla półnormy na $A \odot_B \mathcal{H}$ oraz normy na $X \odot_B \mathcal{H}$. Stąd przedłuża się do izometrii $\Phi: {}^A_P\mathcal{H} \rightarrow X \otimes_\phi \mathcal{H}$. Łatwo też się przekonać, że jeśli $\rho \in \text{Mor}(\mathcal{K}(X), \mathcal{K}(X \otimes_\phi \mathcal{H}))$ jest reprezentacją, o której mówiliśmy w części 2, to

$$\rho(L_a) \circ \Phi = \Phi \circ \pi(a), \quad a \in A,$$

gdzie π jest działaniem A na ${}^A_P\mathcal{H}$ opisanym w części 1. Innymi słowy Φ jest izometrycznym izomorfizmem A -modułów. $\square$

5. TWIERDZENIE O IMPRYMITYWNOŚCI

Twierdzenie 3. *Niech π będzie niezdegenerowaną reprezentacją A na przestrzeni Hilberta $\mathcal{G}$. Wówczas $\mathcal{G}$ jest postaci ${}^A_P\mathcal{H}$ dla pewnego B -modułu $\mathcal{H}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje morfizm $\rho \in \text{Mor}(\mathcal{K}(X), \mathcal{K}(\mathcal{G}))$ taki, że*

$$\pi = \rho \circ \lambda. \quad (5)$$

W tej sytuacji $\mathcal{H} = \rho(P)\mathcal{G}$.

Dowód. Jeśli $\mathcal{G}$ jest indukowany z pewnej reprezentacji ϕ algebry B na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, to istnienie ρ zostało już dowiedzione w twierdzeniu 2.

Założmy więc, że $\mathcal{G}$ jest A modułem i istnieje $\rho \in \text{Mor}(\mathcal{K}(X), \mathcal{K}(\mathcal{G}))$ spełniający (5). Niech $\mathcal{H} = \rho(P)\mathcal{G}$. Na początek sprawdźmy, że $\mathcal{H}$ jest podprzestrzenią niezmienniczą dla działania B (poprzez π). Istotnie, dla $a, a' \in A$ i $b \in B$ mamy

$$L_b P L_a [a'] = L_b P [aa'] = L_b [P(aa')] = [bP(aa')] = [P(baa')] = P L_{ba} [a']$$

(gdzie $[\cdot]$ oznacza klasę elementu algebry A w X), a więc $L_b P L_a = P L_{ba}$ w $\mathcal{L}(X)$. Stąd dla dowolnego $\eta \in \mathcal{G}$, $a \in A$ oraz $b \in B$

$$\begin{aligned} \pi(b)\rho(P)\pi(a)\eta &= \rho(L_b P L_a)\eta \\ &= \rho(P L_{ba})\eta \\ &= \rho(P)\pi(ba)\eta \in \rho(P)\mathcal{G}. \end{aligned}$$

Elementy postaci $\pi(a)\eta$ są gęste w $\mathcal{H}$, więc $\pi(B)\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$.

Dalej sprawdźmy, że $\mathcal{H}$ jest niezdegenerowanym B -modułem. Niech $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ będzie aproksymatywną jedynką dla A . Rachunek

$$(L_{P(e_\alpha)}P)[a] = [P(e_\alpha)P(a)] = [P(e_\alpha P(a))] = (P L_{e_\alpha}P)[a]$$

dla $a \in A$ pokazuje, że $L_{P(e_\alpha)}P = P L_{e_\alpha}P$ w $\mathcal{L}(X)$. Stąd dla $\eta \in \mathcal{G}$ mamy

$$\pi(P(e_\alpha))\rho(P)\eta = \rho(L_{P(e_\alpha)})\rho(P)\eta = \rho(P)\pi(e_\alpha)\rho(P)\eta.$$

Z niezdegenerowania $\mathcal{G}$ wynika, że $\pi(e_\alpha)\rho(P)\eta \xrightarrow{\alpha \in A} \rho(P)\eta$, a co za tym idzie

$$\rho(P)\pi(e_\alpha)\rho(P)\eta \xrightarrow{\alpha \in A} \rho(P)^2\eta = \rho(P)\eta.$$

Dowolny $\xi \in \mathcal{H}$ jest postaci $\rho(P)\eta$ dla pewnego $\eta \in \mathcal{G}$ i powyższe rozumowanie pokazuje, że $\xi \in \pi(B)\mathcal{H}$.

Zdefiniujmy $\Psi_0: A \odot_B \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ kładąc

$$\Psi_0(a \otimes \xi) = \pi(a)\xi.$$

Mamy

$$\begin{aligned} \langle \Psi_0(a \otimes \xi) | \Psi_0(a' \otimes \xi') \rangle &= \langle \pi(a)\xi | \pi(a')\xi' \rangle \\ &= \langle \pi(a)\rho(P)\xi | \pi(a')\rho(P)\xi' \rangle \\ &= \langle \rho(L_a P)\xi | \rho(L_{a'} P)\xi' \rangle \\ &= \langle \xi | \rho(P L_{a^* a'})\xi' \rangle \\ &= \langle \xi | \rho(L_{P(a^* a')})\xi' \rangle \\ &= \langle \xi | \pi(P(a^* a'))\rho(P)\xi' \rangle \\ &= \langle \xi | \pi(P(a^* a'))\xi' \rangle, \end{aligned}$$

co pokazuje, że Ψ_0 definiuje izometrię

$$\Psi: {}^A_P\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}$$

a z definicji Ψ_0 łatwo wynika, że

$$\Psi_0(aa' \otimes \xi) = \pi(a)\Psi_0(a' \otimes \xi), \quad a, a' \in A, \xi \in \mathcal{H}.$$

Stąd Ψ splata reprezentację A na ${}^A_P\mathcal{H}$ i $\mathcal{G}$.

Pokażemy teraz, że Ψ jest surjekcją na $\mathcal{G}$. Po pierwsze obraz Ψ jest niezmienniczy dla $\pi(A)$ (to już wiemy). Co więcej, $(\text{Ran } \Psi)^\perp$ także jest podprzestrzenią niezmienniczą dla $\pi(A)$. Po drugie, z niezdegenerowania reprezentacji π wynika, że obraz Ψ zawiera $\mathcal{H}$.

Niech $\eta \in (\text{Ran } \Psi)^\perp$. Wtedy

$$\|\rho(P)\eta\|^2 = \langle \rho(P)\eta | \rho(P)\eta \rangle = \langle \eta | \rho(P)\eta \rangle = 0,$$

gdyż $\rho(P)\eta \in \mathcal{H} \subset \text{Ran } \Psi$. Stąd, jako że $\pi(A)(\text{Ran } \Psi)^\perp \subset (\text{Ran } \Psi)^\perp$, mamy

$$\rho(P)\pi(a)\eta = 0, \quad a \in A, \eta \in (\text{Ran } \Psi)^\perp.$$

W konsekwencji

$$\pi(a')\rho(P)\pi(a)\eta = 0, \quad a, a' \in A, \eta \in (\text{Ran } \Psi)^\perp.$$

czyli

$$\rho(L_{a'}PL_a)\eta = 0, \quad a, a' \in A, \eta \in (\text{Ran } \Psi)^\perp.$$

W świetle twierdzenia 1 oznacza to, że $\rho(\mathcal{K}(X))(\text{Ran } \Psi)^\perp = \{0\}$. Ponieważ ρ jest z założenia niezdegenerowaną reprezentacją $\mathcal{K}(X)$, otrzymujemy $(\text{Ran } \Psi)^\perp = \{0\}$. $\square$

W powyższym sformułowaniu twierdzenia o imprymitywności nie zajmujemy się faktyczną strukturą algebry $\mathcal{K}(X)$. Jednak w szczególnym przypadku gdy $A = C^*(G)$, a $B = C^*(H)$ dla lokalnie zwartej grupy G i jej otwartej podgrupy H wiadomo o $\mathcal{K}(X)$ znacznie więcej:

Twierdzenie. *Niech G będzie grupą lokalnie zwartą, a H jej otwartą podgrupą. Wówczas $\mathcal{K}(X) \cong C_0(G/H) \rtimes G$, a $\lambda \in \text{Mor}(C^*(G), \mathcal{K}(X))$ pochodzi o kanonicznej reprezentacji G w algebrze $M(C_0(G/H) \rtimes G)$.*

DODATEK

Lemat. *Niech B będzie C^* -algebrą i niech E będzie prawym B -modułem wyposażonym w odwzorowanie $\langle \cdot | \cdot \rangle : E \times E \rightarrow B$ takie, że*

- dla $x, y_1, y_2 \in E$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mamy $\langle x | \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \alpha \langle x | y_1 \rangle + \beta \langle x | y_2 \rangle$,
- dla $x, y \in E$ i $b \in B$ mamy $\langle x | yb \rangle = \langle x | y \rangle b$,
- dla $x, y \in E$ mamy $\langle y | x \rangle = \langle x | y \rangle^*$,
- dla $x \in E$ mamy $\langle x | x \rangle \geq 0$.

Wtedy

$$\langle y | x \rangle \langle x | y \rangle \leq \|\langle x | x \rangle\| \langle y | y \rangle. \quad (6)$$

Dowód. Wystarczy udowodnić (6) w przypadku, gdy $\|\langle x | x \rangle\| = 1$, bo dla $t > 0$ mamy

$$\langle y | tx \rangle \langle tx | y \rangle = t^2 \langle y | x \rangle \langle x | y \rangle \quad \text{oraz} \quad \|\langle tx | tx \rangle\| \langle y | y \rangle = t^2 \|\langle x | x \rangle\| \langle y | y \rangle.$$

Weźmy więc $x, y \in E$ takie, że $\|\langle x | x \rangle\| = 1$ i niech $b \in B$. Mamy

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle xb - y | xb - y \rangle \\ &= \langle xb | xb \rangle - \langle y | xb \rangle - \langle xb | y \rangle + \langle y | y \rangle \\ &= \langle xb | x \rangle b - \langle y | x \rangle b - (\langle y | xb \rangle)^* + \langle y | y \rangle \\ &= (\langle x | xb \rangle)^* b - \langle y | x \rangle b - (\langle y | x \rangle b)^* + \langle y | y \rangle \\ &= (\langle x | x \rangle b)^* b - \langle y | x \rangle b - b^* (\langle y | x \rangle)^* + \langle y | y \rangle \\ &= b^* (\langle x | x \rangle)^* b - \langle y | x \rangle b - b^* (\langle y | x \rangle)^* + \langle y | y \rangle \\ &= b^* \langle x | x \rangle b - \langle y | x \rangle b - b^* \langle x | y \rangle + \langle y | y \rangle \\ &\leq \|\langle x | x \rangle\| b^* b - \langle y | x \rangle b - b^* \langle x | y \rangle + \langle y | y \rangle \\ &= b^* b - \langle y | x \rangle b - b^* \langle x | y \rangle + \langle y | y \rangle. \end{aligned}$$

Teraz kładąc $b = \langle x | y \rangle$ otrzymujemy

$$0 \leq \langle y | x \rangle \langle x | y \rangle - \langle y | x \rangle \langle x | y \rangle - \langle y | x \rangle \langle x | y \rangle + \langle y | y \rangle,$$

czyli

$$\langle y|x \rangle \langle x|y \rangle \leq \langle y|y \rangle = \|\langle x|x \rangle\| \langle y|y \rangle .$$

□

REFERENCES

- [1] E.C. Lance: *Hilbert C*-modules, A toolkit for operator algebraists*.
- [2] M.A. Rieffel: Induced representations of C*-algebras. *Adv. Math.* **13** (1974), 176-257.